А. Н. Марковский

Кубанский государственный университет, г. Краснодар,

mark@kubsu.ru

О ДВИЖЕНИИ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ ВО ВНЕШНОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В работе рассматривается классическая задача [1] о движении точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости. Функция тока такого течения может быть представлена в виде суммы точечных вихрей с заданными интенсивностями плюс потенциал простого слоя, плотность которого (плотность вихрей на границе) требуется определить. С использованием полной на границе системы потенциалов искомая плотность может быть восстановлена. Приводится алгоритм вычисления траекторий движения точечных вихрей.

1. Обозначим внешность ограниченной односвязной области Q с достаточно гладкой границей $S = \partial Q$ через $Q^+ = R^2 \setminus \bar{Q}$. В области Q^+ рассмотрим точечные вихри z_k с заданными интенсивностями Γ_k, $k = 1, 2, .., N$. Центры вихрей $z_k = z_k(t)$ переносятся возникающим течением. Индуцируемое поле скоростей $\mathbf{w}(x, t)$ удовлетворяет в области Q^+ следующим условиям: 1) $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$; 2) $\operatorname{rot}\, \mathbf{w} = 0$ при $x \neq z_k$; 3) $\mathbf{w}(\infty, t) = 0$; 4) граница S – линия тока. Требуется определить векторное поле $\mathbf{w}$ в каждый момент времени, а также траектории вихрей.

2. Для данного положения вихрей z_k, $k = 1, 2, .., N$, функцию тока $\psi(x)$ будем определять в виде

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k E(x - z_k) + \int_S q(y) E(x - y)\, dS_y,\ x \in Q^+, \qquad (1)$$

где $E(x)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа в R^2; функцию $q(y)$ требуется определить так, чтобы выполнялось условие непротекания

$$\psi(x) \equiv B = \text{const}, \ x \in S. \tag{2}$$

Справедливо утверждение: если потенциал Робена на S не равен нулю, то существует единственная функция $g(y)$ в представлении (1) такая, что выполняется условие (2).

3. В $L_2(S)$ возьмём подпространство $L_2^{\varphi}(S)$, ортогональное φ^* – плотность потенциала Робена.

Пусть последовательность точек b^m, $m = 1, 2, ...$, принадлежит области Q, отделена от границы и удовлетворяет условию единственности гармонических функций [2]. Система

$$\alpha_m^-(y) = E(b^{m+1} - y) - E(b^m - y), \ y \in S,$$

линейно независима и полна в $L_2^{\varphi}(S)$ [2]. Тогда

$$q(y) = c_0\varphi^*(y) + \sum_{m=1}^{M} c_m\alpha_m^-(y) + \rho_M(y), \tag{3}$$

где $\rho_M(y) \perp \alpha_m^-(y)$, $m = 1, 2, ..., M$ и $\rho_M(y) \to 0$, $M \to \infty$.

Подставив (3) в выражение (1) и рассматривая результат в точках b^n, $n = 1, 2, ..., M$, получим для определения коэффициентов c_m систему линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^{M} c_m(\alpha_m^-, \alpha_n^-(y))_{L_2(S)} = -\sum_{k=1}^{N} \Gamma_k \alpha_n^-(z_k), \ n = 1, 2, ..., M.$$

4. В текущий момент времени поле скоростей $\mathbf{w}$ определяется коградиентом $\nabla_c\psi(x)$ функции тока, и каждый вихрь будет эволюционировать согласно закону

$$\dot{z}_k = \nabla_c\psi(z_k), \ k = 1, 2, ..., N.$$

Функция $\psi(z)$ имеет особенность в z_k, но она не влияет на движение k-го точечного вихря: записав уравнения движения, мы можем вычесть вклад влияния этого вихря на себя.

Работа поддержана РФФИ (проект 11-01-96511) и Министерством образования науки Российской Федерации (проект 2.1.1/3828).

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов А. В., Мамаев И. С., Соколовский М. А. *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей.* – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 704 с.

2. Лежнев А. В., Лежнев В. Г. *Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики.* – Краснодар, 2009. – 111 с.

Н. В. Мартемьянова

Поволжская государственная социально-гуманитарная академия, г. Самара,

ninamartem@yandex.ru

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ

Рассмотрим уравнение эллиптико-гиперболического типа с неизвестными правыми частями

$$Lu \equiv u_{xx} + \mathrm{sgn} y \cdot u_{yy} - b^2 u = f(x,y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y) | \ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b \geqslant 0$ – заданные действительные числа, в